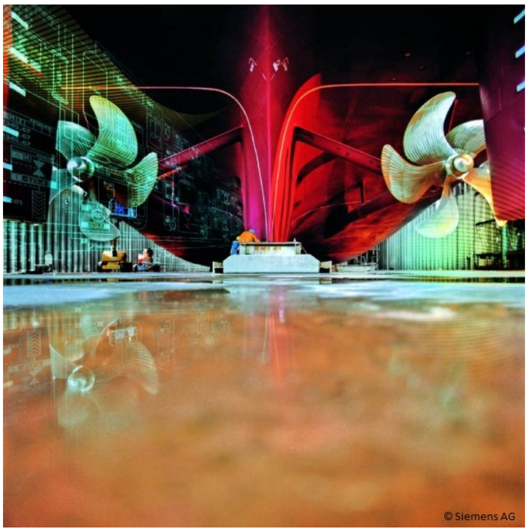
# Gleichungssysteme und Funktionen

## Auslastung einer Hotline berechnen




Sie arbeiten als Ingenieur bzw. Ingenieurin bei der Firma Siemens und betreuen eine Schiffswerft bei technischen Fragen.

Die Werft hat für seine Radarsysteme eine Hotline eingerichtet. Dort können bis zu 550 Kunden gleichzeitig anrufen und bekommen einen Ansagetext vorgespielt. Jetzt wird die Auslastung der Hotline überprüft. Schließlich sollen alle Kunden die Hotline erreichen können. Für diese Analyse wurde längere Zeit die Anzahl der zugreifenden Personen erfasst. Der Erfassungszeitraum lag zwischen 5:00 und 19:00 Uhr. Dieser Zusammenhang kann durch eine Funktion 3. Grades beschrieben werden. Um 9 Uhr morgens sind 276 Kunden auf der Leitung. Die Anzahl der Anrufer steigt um 9 Uhr um 72 Anrufer. Um 17 Uhr sind auf dem Portal noch 532 Kunden gleichzeitig in der Leitung. Jedoch verringert sich die Anzahl der Anrufer um 17:00 Uhr um 72 Anrufer.

a) Ermitteln Sie die Funktion, mit der sich die Anzahl der Kunden in der Hotline in Abhängigkeit von der Zeit darstellen lässt. Setzen Sie dabei 5:00 Uhr als $t = 0$.

b) Gehen Sie ab jetzt von der Funktion $a(t) = -t^3 + 30t^2 - 225t + 600$ aus. Überprüfen Sie als verantwortlicher Projektleiter, ob die maximale Auslastung der Hotline im Zeitraum von 5:00 Uhr bis 19:00 Uhr überschritten wird.

c) Um welche Uhrzeit ist der größte Anruferzuwachs auf der Hotline?

d) Im Rahmen der Überprüfung fordert die Marketingabteilung eine Angabe über die gesamte Anzahl der Kunden, die sich in der Kernarbeitszeit auf der Hotline befinden. Berechnen Sie die gesamte Anzahl der momentanen Kunden, die sich zwischen 5:00 Uhr und 19:00 Uhr auf der Hotline befinden.

Bildquelle: Siemens AG

## Lösung

Im Folgenden wird davon ausgegangen, dass mit einem WTR gearbeitet wird.

a) Gesucht ist eine Funktion 3. Grades: $f(t) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ mit $f'(t) = 3ax^2 + 2bx + c$.
Dem Text können folgende Bedingungen entnommen werden, aus denen sich ein Gleichungssystem ergibt:

| | |
|---|---|
| $f(4) = 276$ | $a*4^3 + b*4^2 + c*4 + d = 276$ |
| $f'(4) = 72$ | $3a*4^2 + 2b*4 + c = 72$ |
| $f(12) = 532$ | $a*12^3 + b*12^2 + c*12 + d = 532$ |
| $f'(12) = -72$ | $3a*12^2 + 2b*12 + c = -72$ |

$64a + 16b + 4c + d = 276$
$48a + 8b + c = 72$
$1728a + 144b + 12c + d = 532$
$432a + 24b + c = -72$

Lösen des Gleichungssystems liefert:
$a = -1$
$b = 15$
$c = 0$
$d = 100$
Damit ist die Funktion $f(t) = -x^3 + 15x^2 + 100$ die gesuchte Funktion.

b) Mit einem WTR ist es nicht möglich, die Gleichung $550 = -t^3 + 30 * t^2 - 225 * t + 600$ zu lösen. Es gilt, den Hochpunkt der Funktion $a(t) = -t^3 + 30\,t^2 - 225t + 600$ im Intervall [0; 14] zu bestimmen.
$a'(t) = -3t^2 + 60t - 225$
$a''(t) = -6t + 60$

Prüfe die notwendige Bedingung $a'(t) = 0$ sowie die hinreichende Bedingung $a''(t1/2) < 0$.
$a'(t) = 0$
$-3\,t^2 + 60t - 225 = 0$ | : -3
$t^2 - 20t + 75 = 0$ | pq-Formel
$t1/2 = 10 \pm \sqrt{100 - 75}$
$t1 = 15$ (außerhalb des Intervalls) $t2 = 5$

$a''(t2) < 0$
$a''(5) = -6 * 5 + 60 = 30 > 0 \rightarrow$ hinreichende Bedingung nicht erfüllt bzw. Tiefpunkt
$a(5) = -53 + 30 * 52 - 225 * 5 + 600 = 100$ TP (5/100)

Die Funktion ist eine Funktion 3. Grades. Die Hochstelle liegt außerhalb des Intervalls [0; 14] bei t1 = 15, der Tiefpunkt liegt bei TP (5/100). Der globale Verlauf sagt vorher, das der größte Wert am Rand des Intervalls angenommen wird. Deshalb gilt es die Funktionswerte für t = 0 und t = 14 zu prüfen.
$a(0) = -03 + 30 * 02 - 225 * 0 + 600 = 600$
$a(14) = -143 + 30 * 142 - 225 * 14 + 600 = 586$

**Beide Werte überschreiten die maximale Auslastung der Hotline.**

## Lösung

c) Es ist zu prüfen, wann die Steigung maximal wird (am Wendepunkt). Prüfe die notwendige Bedingung $a''(t) = 0$ sowie die hinreichende Bedingung $a'''(t) \neq 0$.

$a''(t) = -6t + 60$
$a'''(t) = -6$

$a''(t) = 0$
$-6t + 60 = 0$
$t3 = 10$

$a'''(t3) \neq 0$
$a'''(10) = -6 \neq 0 \rightarrow$ hinreichende Bedingung erfüllt
$a(10) = -10^3 + 30 * 10^2 - 225 * 10 + 600 = 350$ WP (10/350)
Um 15 Uhr ist der größte Anruferzuwachs auf der Hotline.

d) Zu berechnen ist das Integral über die Funktion a(t) im Intervall [0; 14].
$A(t) = -0{,}25\ t^4 + 10\ t^3 - 112{,}5\ t^2 + 600t$

$\int_0^{14} a(t)\ dt$
$= \int_0^{14} (-t^3 + 30t^2 - 225t + 600)\ dt$
$= [-0{,}25\ t^4 + 10\ t^3 - 112{,}5\ t^2 + 600t]_0^{14}$
$= (-0{,}25 * 14^4 + 10 * 14^3 - 112{,}5 * 14^2 + 600 * 14) - (-0{,}25 * 0^4 + 10 * 0^3 - 112{,}5 * 0^2 + 600 * 0)$
$= 4186 - 0$
$= 4186$

**Insgesamt befinden sich zwischen 5 Uhr und 19 Uhr 4186 Kunden auf der Hotline.**

## Schlagworte zum Inhalt

Sekundarstufe II – Funktionsgleichung aufstellen – Gleichungssystem lösen – Kurvendiskussion – Ableiten