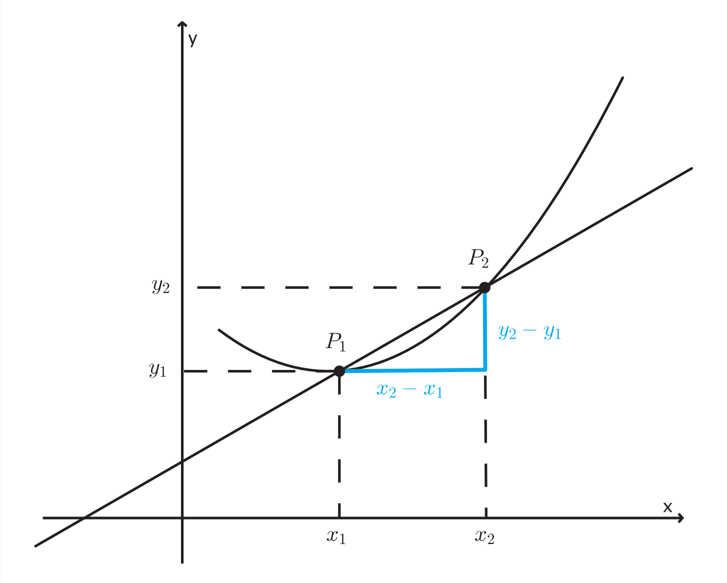
Differenzenquotient

- Der Differenzenquotient wird auch **mittlere Änderungsrate** genannt und gibt die Steigung einer Sekante an.
  Eine Sekante ist eine Gerade, die durch zwei Punkte geht, die auf einer Kurve liegen.

- Möchte man die mittlere Änderungsrate einer Kurve bestimmen, so wählt man zwei Punkte auf der Kurve. Je enger diese beiden Punkte beieinanderliegen, umso weniger unterscheidet sich die geradlinige Verbindung dieser beiden Punkte von der tatsächlich gekrümmten Kurve.



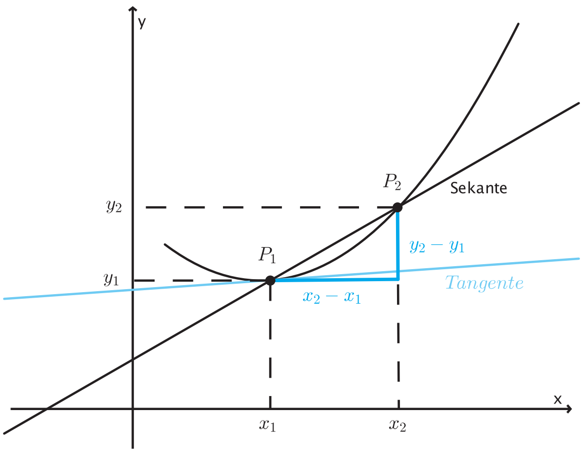
- Für die Steigung der Sekante, also die mittlere Änderungsrate, durch $P_1(x_1|y_1)$ und $P_2(x_2|y_2)$ gilt:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad \text{bzw.} \quad m = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}.$$

Differentialquotient

- Der Differenzenquotient gibt die Steigung einer Geraden durch zwei Punkte, die auf dem Graphen einer Funktion liegen, an. Er ist ein Zwischenschritt bei der Bestimmung der Steigung einer Kurve in einem Punkt.

- Zur Bestimmung der Steigung in einem Punkt, also der **momentanen Änderungsrate**, nähert man den Punkt P_2 dem Punkt P_1 an. Dabei wird die Sekante zur Tangente.



- Mathematisch betrachtet verbirgt sich hinter dieser Annäherung der **Grenzwert**.

  Es gilt: $m = \lim\limits_{x \to x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ oder $m = \lim\limits_{x \to x_1} \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}$.

  m gibt die momentane Änderungsrate, also den Differentialquotienten, an.

- Schreibt man für die Stelle $x_2 = x_1 + h$, so erhält man für den Differentialquotienten eine andere Schreibweise, die sog. **h-Methode**:

$$m = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$

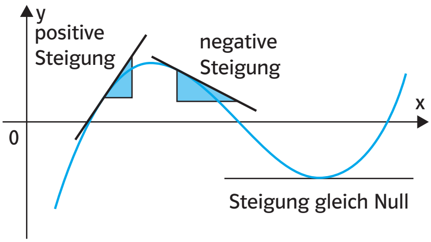
- Der Differentialquotient ist die **Ableitung $f'(x_1)$** der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_1. Die erste Ableitung einer Funktion an der Stelle x_1 gibt die **Steigung der Tangente** an den Funktionsgraphen in Punkt P_1 an.

Ableitungen und ihre Bedeutung

- Die erste Ableitung einer Funktion f an einer Stelle x_0 gibt die momentane Änderungsrate oder geometrisch die **Steigung der Tangente** an den Graphen an dieser Stelle an. Sie wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet.

- Ist $f'(x_0) > 0$ so steigt der Graph an dieser Stelle.

  Ist $f'(x_0) < 0$ so fällt der Graph an dieser Stelle.



- Die Ableitung ist ein wichtiges Hilfsmittel zur Bestimmung von besonderen Stellen eines Graphen. Ebenso gibt sie Auskunft über den Verlauf des Graphen.
  - Mit Hilfe der ersten Ableitung bestimmt man mögliche **Extremstellen**.
  - An diesen Stellen gilt: $f'(x_0) = 0$.
  - Mit Hilfe der zweiten Ableitung kann man bestimmen, ob es sich wirklich um eine Extremstelle handelt und ob es ein Tiefpunkt oder ein Hochpunkt ist.
  - Mit der zweiten Ableitung können auch mögliche **Wendestellen** bestimmt werden. An diesen Stellen gilt: $f''(x_0) = 0$.
  - Die dritte Ableitung dient zur Klärung, ob es sich wirklich um eine Wendestelle handelt.
  - Ist f′ streng monoton wachsend (also $f''(x_0) > 0$), dann beschreibt der Graph von f eine Linkskurve. Ist f′ streng monoton fallend (also $f''(x_0) < 0$), dann beschreibt der Graph von f eine Rechtskurve.

- Die Ableitung dient zur **Bestimmung des Monotonieverhaltens** einer Funktion.

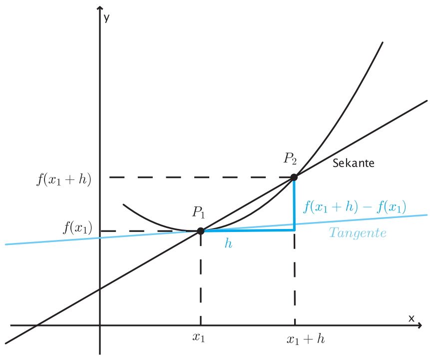
Ableitung mittels Differenzenquotient und Differentialquotient

- Um die Ableitung mithilfe des Differenzenquotienten und Differentialquotienten zu bestimmen, geht man folgendermaßen vor:
  - Bestimmung des Differenzenquotienten (Steigung der Sekante);
  - Bildung des Grenzwertes des Differenzenquotienten.

- Hierbei ist es einfacher, anstelle der Funktionswerte x_1 und x_2 die h-Methode zu verwenden, da sie übersichtlicher ist.

- Es gilt:

$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}.$$



- **Beispiel:**
  Ableitung der Funktion
  $f(x) = x^3 - 2$
  an der Stelle
  $x_1 = 2$

  Für den Differenzenquotienten gilt:

$$m = \frac{f(x_1 + h) - f(x_1)}{h}$$
$$= \frac{(x_1 + h)^3 - 2 - (x_1^3 - 2)}{h}$$
$$= \frac{3x_1^2 h + 3x_1 h^2 + h^3}{h}$$
$$= 3x_1^2 + 3x_1 h + h^2$$

Grenzwert:

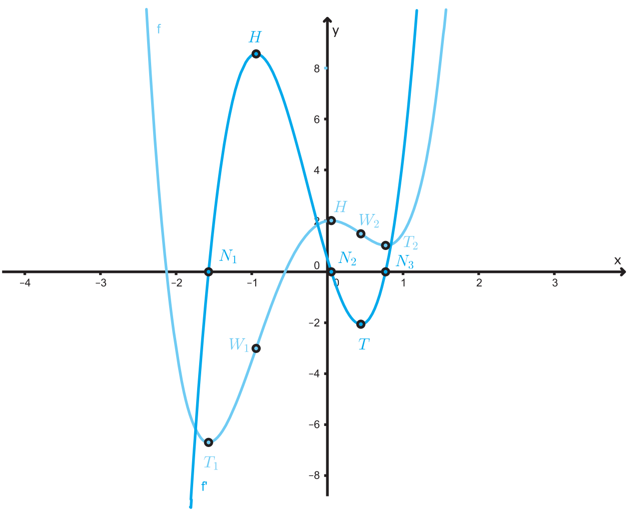
$$f'(x_1) = \lim_{h \to 0} 3x_1^2 + 3x_1 h + h^2 = 3x_1^2$$

Damit folgt für $x_1 = 2$: $f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$.

Schließen von f auf f′

- Ist der Graph der Funktion f gegeben, so kann man daraus den Graphen der 1. Ableitung skizzieren.
  Dazu geht man folgendermaßen vor:
  - Man sucht nach besonderen Stellen des Graphen und zeichnet diese ein:
    An den Stellen, an denen der Graph der Funktion f Extremstellen hat, hat der Graph der Ableitung Nullstellen.
    An den Stellen, an denen der Graph der Funktion f Wendestellen hat, hat der Graph der Ableitung Extremstellen.
  - Man schaut, ob es sich bei den Extremstellen um einen Hochpunkt oder einen Tiefpunkt handelt.
    Bei einem Hochpunkt wechseln die Funktionswerte der Ableitung von plus nach minus, am Tiefpunkt von minus nach plus.
  - Man schätzt ab, zwischen welchen Werten sich ungefähr die Steigungen bewegen.

- **Beispiel:**



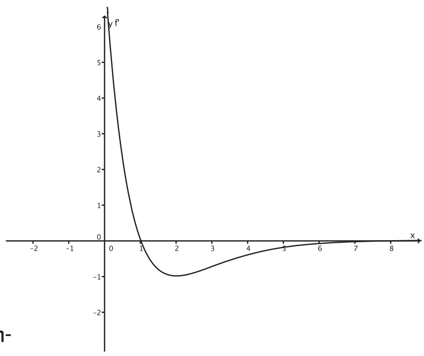
Schließen von f′ auf f

- Ist der Graph der 1. Ableitung f′ gegeben, so kann man daraus den Graphen der Funktion f skizzieren.

- Hierbei muss man darauf achten, dass die Funktionen f und g mit $g(x) = f(x) + c$ dieselbe Ableitungsfunktion f′ besitzen. Somit ist der Graph von f nicht eindeutig festgelegt.

- Dazu geht man folgendermaßen vor:
  - Man sucht nach besonderen Stellen der Ableitungsfunktion und zeichnet diese ein:
    An den Stellen, an denen die Ableitung Nullstellen hat, hat der Graph der Funktion f Extremstellen.
    An den Stellen, an denen die Ableitung Extremstellen hat, hat der Graph der Funktion f Wendestellen.
  - Außerdem kann man folgende Eigenschaften ausnutzen:
    Verläuft der Graph der Ableitung f′ oberhalb (unterhalb) der x-Achse, so ist der Graph von f streng monoton zunehmend (abnehmend).
    Ist der Graph der Ableitung f′ streng monoton zunehmend (abnehmend), so macht der Graph von f eine Linkskurve (Rechtskurve).

- **Beispiel:**
  Das Schaubild zeigt den Graphen der Ableitungsfunktion f′.



1. Behauptung:
Das Schaubild von f besitzt an der Stelle $x = 2$ einen Extrempunkt.
Die Behauptung ist falsch, da der Graph von f′ an dieser Stelle eine Extremstelle besitzt, besitzt der Graph von f dort eine Wendestelle.

2. Behauptung:
Das Schaubild von f besitzt an der Stelle $x = 1$ einen Extrempunkt.
Die Behauptung ist wahr, da dort der Graph von f′ eine Nullstelle mit Vorzeichenwechsel hat.

Ableitungsregeln

- Um eine Ableitung richtig zu berechnen, muss man einige Ableitungsregeln kennen. Je nach Funktion kommen hier verschiedene Regeln zum Einsatz.

- **Ableitung einer Konstanten:**
  Da die Steigung einer konstanten Funktion immer Null ist, ist auch ihre Ableitung 0. Es gilt:
  $$f(x) = a \quad \Rightarrow \quad f'(x) = 0.$$

- **Summenregel:**
  Für eine Summe von Funktionen $f(x) = u(x) + v(x)$ gilt:
  $$f'(x) = u'(x) + v'(x)$$

- **Faktorregel:**
  Ist k eine reelle Zahl unabhängig von der Variablen x, so gilt:
  $$f(x) = k \cdot u(x)$$
  $$f'(x) = k \cdot u'(x)$$
  Man sagt auch kurz: Der konstante Faktor k bleibt beim Ableiten erhalten.

- **Potenzregel:**
  Beim Ableiten einer Potenzfunktion $f(x) = x^n$ stellt man den Exponenten n nach vorne und verringert den Exponenten beim x um 1:
  $$f(x) = x^n \quad \Rightarrow \quad f'(x) = n \cdot x^{n-1}$$

- Achtung **Fehlerquelle**!
  Ein konstanter Faktor bleibt beim Ableiten erhalten.
  Beispiel: $f(x) = 5 \cdot x^2$
  $f'(x) = 5 \cdot 2x = 10x$

  Ein konstanter Summand fällt beim Ableiten weg.
  Beispiel: $f(x) = x^3 + x + 3$
  $f'(x) = 3x^2 + 1$

Ableitungen wichtiger Grundfunktionen

- Die Ableitung folgender Funktionen sollte man auswendig kennen.

f(x)	f′(x)
c	0
x	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
$\sin(x)$	$\cos(x)$
$\cos(x)$	$-\sin(x)$
e^x	e^x
$e^{k \cdot x}$	$k \cdot e^{k \cdot x}$
$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$

Produktregel und Quotientenregel

- **Produktregel:**
  Sind zwei Funktionen u und v ableitbar im Intervall I mit $x \in I$, so ist auch das Produkt f mit $f(x) = u(x) \cdot v(x)$ ableitbar und es gilt:
  $$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x).$$

- **Quotientenregel:**
  Sind zwei Funktionen u und v ableitbar im Intervall I mit $x \in I$ und $v(x) \neq 0$,
  so ist auch der Quotient f mit $f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$ ableitbar und es gilt:
  $$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{(v(x))^2}.$$

- Bei der Quotientenregel muss man vor allem auf das Minuszeichen im Zähler achten.
  D.h. man sollte darauf achten, dass man genügend Klammern setzt, um Vorzeichenfehler zu vermeiden.

- Bei beiden Regeln sollte man, bevor man weiter ableitet, zuerst vereinfachen, zusammenfassen oder ausklammern.

- **Beispiel** Produktregel:
  $$f(x) = (x^2 + 1) \cdot \cos(x) \qquad u(x) = x^2 + 1;\ v(x) = \cos(x)$$
  $$f'(x) = 2x \cdot \cos(x) + (x^2 + 1) \cdot (-\sin(x)) \qquad u'(x) = 2x;\quad v'(x) = -\sin(x)$$
  $$= 2x \cdot \cos(x) - (x^2 + 1) \cdot \sin(x)$$

  Beispiel Quotientenregel:
  $$f(x) = \frac{2x}{1 + 3x^2} \qquad u(x) = 2x;\ v(x) = 1 + 3x^2$$
  $$f'(x) = \frac{2 \cdot (1 + 3x^2) - 2x \cdot (6x)}{(1 + 3x)^2} = \frac{2 + 6x^2 - 12x^2}{(1 + 3x)^2} \qquad u'(x) = 2;\quad v'(x) = 6x$$
  $$= \frac{2 - 6x^2}{(1 + 3x)^2}$$

Kettenregel

- Zwei Funktionen u und v können nicht nur addiert, subtrahiert, multipliziert oder dividiert werden, sondern sie können auch miteinander verkettet werden.
  Sind zwei Funktionen u und v gegeben, so heißt die Funktion
  $$u \circ v\colon\ x \mapsto u(v(x)).$$
  Verkettung der Funktionen u und v.
  Dabei wird im Funktionsterm der Funktion u jedes x durch $v(x)$ ersetzt.
  u nennt man **äußere Funktion** und v **innere Funktion**.

- **Beispiel:**
  Gegeben sind die Funktionen $u(x) = (x+1)^2$ und $v(x) = 3x+1$.

  Für die Verkettung von u mit v gilt: $u(v(x)) = (3x+1+1)^2 = (3x+2)^2$.

  Für die Verkettung von v mit u gilt: $v(u(x)) = 3(x+1)^2 + 1$.

- Zum Ableiten von verketteten Funktionen verwendet man die **Kettenregel**:
  Ist eine Funktion f durch eine Verkettung $f(x) = u(v(x))$ gegeben und sind die äußere Funktion u und die innere Funktion v ableitbar, so ist f ebenfalls ableitbar und es gilt:
  $$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x).$$

- **Beachte:**
  Vergiss die Ableitung der inneren Funktion $v'(x)$ nicht!

- **Beispiel:**

  $f(x) = \sqrt{1+2x} = (1+2x)^{\frac{1}{2}}$

  Äußere Funktion: $u(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$ mit $u'(x) = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$

  Innere Funktion: $v(x) = 1 + 2x$ mit $v'(x) = 2$

  $f'(x) = \frac{1}{2} \cdot (1+2x)^{-\frac{1}{2}} \cdot 2 = (1+2x)^{-\frac{1}{2}}$

Anwendung der Ableitungsregeln

- Oft muss die Kettenregel zusammen mit der Produktregel oder der Quotientenregel angewendet werden.

- Leite die folgenden Funktionen einmal ab:

- $f(x) = 3x \cdot (x^2 + 6x + 7)^4$

  Hier verwendet man zum Ableiten die Produktregel und die Kettenregel:
  $u(x) = 3x; \quad u'(x) = 3$
  $v(x) = (x^2 + 6x + 7)^4; \quad v'(x) = 4 \cdot (x^2 + 6x + 7)^3 \cdot (2x + 6)$

  $$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot (x^2 + 6x + 7)^4 + 3x \cdot 4 \cdot (x^2 + 6x + 7)^3 \cdot (2x + 6) \\ &= 3 \cdot (x^2 + 6x + 7)^4 + 12x \cdot (x^2 + 6x + 7)^3 \cdot (2x + 6) \\ &= \big(3 \cdot (x^2 + 6x + 7) + 12x \cdot (2x + 6)\big) \cdot (x^2 + 6x + 7)^3 \\ &= 3 \cdot (9x^2 + 30x + 7) \cdot (x^2 + 6x + 7)^3 \end{aligned}$$

- $f(x) = \ln(x) \cdot \sin(3x)$

  Hier verwendet man zum Ableiten die Produktregel und die Kettenregel:

  $u(x) = \ln(x); \quad u'(x) = \frac{1}{x}$

  $v(x) = \sin(3x); \quad v'(x) = 3 \cdot \cos(3x)$

  $f'(x) = \frac{1}{x} \cdot \sin(3x) + 3 \cdot \ln(x) \cdot \cos(3x)$

- $f(x) = \frac{2x^2 + 8x}{(2x + 4)^2}$

  Hier verwendet man die Quotientenregel und die Kettenregel:

  $u(x) = 2x^2 + 8x; \quad u'(x) = 4x + 8$

  $v(x) = (2x + 4)^2; \quad v'(x) = 2 \cdot (2x + 4) \cdot 2 = 4 \cdot (2x + 4)$

  $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(4x + 8) \cdot (2x + 4)^2 - (2x^2 + 8x) \cdot 4 \cdot (2x + 4)}{(2x + 4)^4} \\ &= \frac{(4x + 8) \cdot (2x + 4) - (2x^2 + 8x) \cdot 4}{(2x + 4)^3} = \frac{32}{(2x + 4)^3} \end{aligned}$$

Tangente

- $P_0(x_0 \mid f(x_0))$ ist ein Punkt des Graphen der Funktion f.
  Eine Gerade t durch P_0 heißt Tangente an den Graphen in P_0, wenn t die Steigung $f'(x_0)$ hat.

- Aus der Punktsteigungsform einer Geradengleichung
  $f'(x_0) = \frac{y - f(x_0)}{x - x_0}$ erhält man die Tangentengleichung:
  $$t\colon\; y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

- **Beispiel:** Bestimmung der Tangentengleichung t an den Graphen der Funktion f im Berührpunkt B
  $f(x) = 2x - \frac{1}{4}x^2$; $B(2 \mid 3)$
  Setzt man den Punkt B in die Tangentengleichung ein, so erhält man:
  $t\colon\; y = f'(2) \cdot (x - 2) + 3.$
  Mit $f'(x) = 2 - \frac{1}{2}x$ folgt $f'(2) = 2 - \frac{1}{2} \cdot 2 = 1$ und damit für die Tangente:
  $$t\colon\; y = 1 \cdot (x - 2) + 3 = x + 1.$$

- **Beispiel:** Bestimmung der Tangentengleichung und des Berührpunktes $B(x_0 \mid f(x_0))$ bei gegebener Tangentensteigung
  $f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3$; $m = 5$
  Da $m = f'(x_0) = 5$ und mit der Ableitung $f'(x) = x$ folgt: $x_0 = 5$.
  Somit lautet der Berührpunkt: $B(5 \mid 15{,}5)$.
  Daraus ergibt sich wie im Beispiel davor die Tangentengleichung zu:
  $$t\colon\; y = 5 \cdot (x - 5) + 15{,}5 = 5x - 9{,}5.$$

Tangenten von außerhalb an den Graphen von f

- Bei Aufgaben von Tangenten gibt es drei Grundaufgaben:
  - Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Berührpunkt B.
  - Bestimme die Gleichung der Tangente an den Graphen von f bei vorgegebener Tangentensteigung.
  - Bestimme die Gleichungen der Tangenten an den Graphen von f von einem Punkt P aus, der nicht auf dem Graphen liegt.

  Die ersten beiden Aufgabenstellungen wurden bereits auf S. 21 mit Beispielen vorgestellt.

- **Beispiel:** Bestimmung der Berührpunkte der Tangenten und der Tangentengleichungen an den Graphen von $f(x) = 2x^2 - 3$ von einem Punkt $A(2\,|\,-3)$ außerhalb

  Für die Tangente gilt: $t\colon\ y = f'(x_0)\cdot(x - x_0) + f(x_0)$.

  Da der Punkt A auf der Tangente liegt, gilt: $-3 = f'(x_0)\cdot(2 - x_0) + f(x_0)$.

  Mit $f'(x_0) = 4x_0$ und $f(x_0) = 2x_0^2 - 3$ folgt:

  $-3 = 4x_0\cdot(2 - x_0) + (2x_0^2 - 3)$
  $-3 = 8x_0 - 4x_0^2 + 2x_0^2 - 3$
  $0 = 2x_0\cdot(-x_0 + 4)$

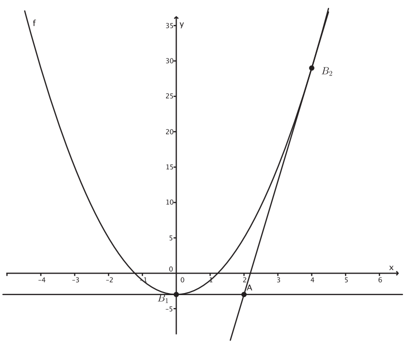
  Aus dieser Gleichung folgt: $x_{0,1} = 0$ und $x_{0,2} = 4$.

  Die beiden Berührpunkte haben die Koordinaten:

  $B_1(0\,|\,-3)$ und $B_2(4\,|\,29)$.

  Die Tangentengleichungen lauten:

  $t_1\colon\ y = 0\cdot(x - 0) + (-3) = -3$
  $t_2\colon\ y = 16\cdot(x - 4) + 29 = 16x - 35$.



Normale

- $P_0(x_0 \mid f(x_0))$ ist ein Punkt des Graphen der Funktion f.
  Eine Gerade n durch P_0 heißt Normale an den Graphen in P_0, wenn n senkrecht (orthogonal) zur Tangente in P_0 an den Graphen ist.

- Für die Gleichung der Normalen gilt:

$$n:\ y = -\frac{1}{f'(x_0)} \cdot (x - x_0) + f(x_0).$$

- Die Bedingung für die Steigung der Normalen $m = -\frac{1}{f'(x_0)}$ erhält man aus der Bedingung für zueinander orthogonale Geraden.

- Gegeben ist eine Ursprungsgerade durch den Punkt $P(a \mid b)$. Dreht man diese um 90° mit dem Ursprung als Drehpunkt nach links, so wird aus dem Punkt P der Punkt $Q(-b \mid a)$.

  Für die Steigung der Geraden g gilt:

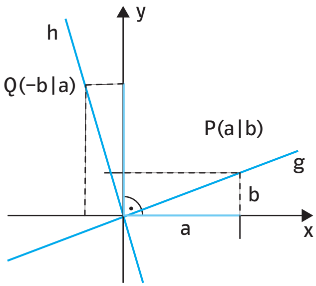
$$m_g = \frac{b}{a}.$$

  Für die Steigung der Geraden h gilt:

$$m_h = -\frac{a}{b}.$$

  Aus diesen beiden Steigungen folgt die **Bedingung für orthogonale Geraden**:

$$m_g \cdot m_h = -1.$$



- **Beispiel:**
  Bestimme die Gleichung der Normalen an den Graphen von f im Punkt $B(2 \mid 3)$.
  Für die Tangentengleichung an den Graphen von f in diesem Punkt gilt:
  $t:\ y = x + 1$.

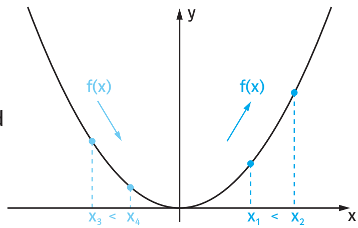
  Damit hat die Normale die Steigung: $m_n = -\frac{1}{f'(2)} = -1$

  und damit folgt für die Gleichung der Normalen:

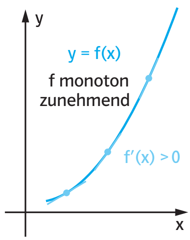
$$n:\ y = -1 \cdot (x - 2) + 3 = -x + 5.$$

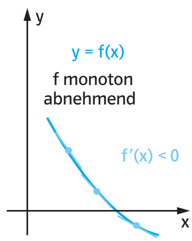
Monotonie

- Wenn für alle x_1, x_2 aus einem Intervall I gilt:
  - Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) < f(x_2)$, dann ist die Funktion f streng monoton wachsend im Intervall I.
  - Aus $x_1 < x_2$ folgt $f(x_1) \leqq f(x_2)$, dann ist die Funktion f monoton wachsend im Intervall I.
  - Aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) > f(x_2)$, dann ist die Funktion f streng monoton fallend im Intervall I.
  - Aus $x_1 > x_2$ folgt $f(x_1) \geqq f(x_2)$, dann ist die Funktion f monoton fallend im Intervall I.



- **Monotoniesatz:**
  Die Funktion f sei im Intervall I differenzierbar. Wenn für alle $x \in I$ gilt:
  - $f'(x) > 0$, dann ist f streng monoton wachsend im Intervall I;
  - $f'(x) < 0$, dann ist f streng monoton fallend im Intervall I.





Beachte: Dieser Satz ist nicht umkehrbar. D.h. obwohl die Funktion streng monoton ist, kann $f'(x) = 0$ sein.

- Mithilfe der Monotonie kann man Aussagen über das Krümmungsverhalten der Funktion f machen.
  - Wenn f′ in einem Intervall I streng monoton wachsend ist, also $f''(x) > 0$, so beschreibt der Graph von f eine Linkskurve.
  - Wenn f′ in einem Intervall I streng monoton fallend ist, also $f''(x) < 0$, so beschreibt der Graph von f eine Rechtskurve.

Extremstellen

- Der Funktionswert $f(x_0)$ heißt
  - **lokales Maximum** von f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle Werte $x \in U(x_0)$ aus dem Definitionsbereich gilt:

    $f(x) \leqq f(x_0)$;
  - **lokales Minimum** von f, wenn es eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, so dass für alle Werte $x \in U(x_0)$ aus dem Definitionsbereich gilt:

    $f(x) \geqq f(x_0)$.

- Gilt die Bedingung $f(x) \leqq f(x_0)$ bzw. $f(x) \geqq f(x_0)$ nicht nur in einer Umgebung, sondern für den gesamten Definitionsbereich, so nennt man es auch **globales Maximum** bzw. **globales Minimum.**

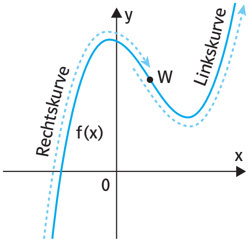
- Befindet sich das globale Extremum am Rand des Definitionsbereiches, so handelt es sich um ein **globales Randextremum**.

- Vorgehen bei der **Bestimmung von lokalen Extrempunkten**
  - Notwendige Bedingung: $f'(x_0) = 0$
    Die Bedingung muss immer erfüllt sein, liefert aber nur mögliche Stellen.
  - Hinreichende Bedingung:
    Wenn $f'(x_0) = 0$ und ein Vorzeichenwechsel von $f'(x)$ bei x_0 von − nach + (bzw. von + nach −) stattfindet, so liegt dort ein lokales Minimum (bzw. ein lokales Maximum) vor.
    oder
    Wenn $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$ (bzw. $f''(x_0) < 0$), so liegt dort ein lokales Minimum (bzw. lokales Maximum) vor.

  Nicht alle Lösungen der Gleichung $f'(x_0) = 0$ müssen Extremstellen der Funktion f sein. Findet in der Ableitung f′ an der Stelle x_0 kein Vorzeichenwechsel statt, so liegt ein **Sattelpunkt** vor.

Wendestellen

- Eine Stelle x_0 vom Definitionsbereich D heißt Wendestelle von f, wenn im zugehörigen Punkt $W(x_0 \mid f(x_0))$ das Schaubild von einer Linkskurve in eine Rechtskurve übergeht oder umgekehrt. Der Punkt W heißt Wendepunkt des Schaubildes.



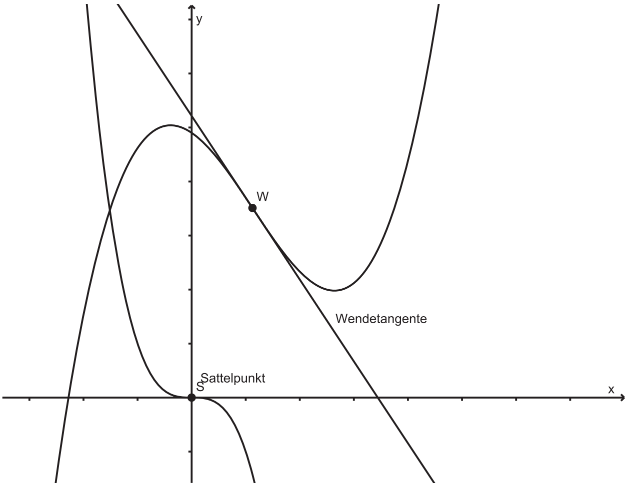
- Notwendige Bedingung für einen Wendepunkt:
  $f''(x_0) = 0$
  Die Bedingung muss immer erfüllt sein, liefert aber nur mögliche Stellen.

- Hinreichende Bedingung für einen Wendepunkt:
  - Wenn $f''(x_0) = 0$ und ein Vorzeichenwechsel von $f''(x)$ bei x_0 vorliegt, so liegt dort eine Wendestelle vor.

  oder
  - Wenn $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$, so liegt dort eine Wendestelle vor.

- Eine Tangente im Wendepunkt heißt **Wendetangente**.

- Ein Wendepunkt mit waagerechter Tangente heißt **Sattelpunkt**.



Newton'sches Näherungsverfahren

- Das Newton-Verfahren ist ein rechnerisches Verfahren, mit dem man in vielen Fällen einen **Näherungswert für Nullstellen** von Funktionen schnell bestimmen kann.

- Hat die differenzierbare Funktion f eine Nullstelle, so kann man diese näherungsweise mit dem Newton-Verfahren ermitteln. Die Iterationsvorschrift mit dem Startwert x_0 lautet:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

- Das Newton-Verfahren gilt für jede **differenzierbare Funktion**. Aber nicht immer führt das Verfahren zum Erfolg. Damit x_{n+1} berechnet werden kann, muss $f'(x_n) \neq 0$ sein. Aber auch wenn dies der Fall ist, kann es vorkommen, dass die errechneten x_n-Werte nicht gegen die gesuchte Nullstelle streben. In solchen Fällen muss man einen Startwert wählen, der „dichter" an der gesuchten Nullstelle liegt.

- **Beispiel:** $f(x) = x^2 - 2$
  $f'(x) = 2x$
  Die Funktion hat genau eine Nullstelle x im Intervall $I = [0; 2]$, da $f(0) = -2$ und $f(2) = 2$.

  Rekursionsbedingung: $x_{n+1} = x_n - \frac{x_n^2 - 2}{2x_n} = \frac{2x_n^2 - x_n^2 + 2}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 2}{2x_n}$

  Setzt man als Startwert $x_0 = 1$ ein, so erhält man: $x_1 = \frac{1^2 + 2}{2} = \frac{3}{2}$.

  Nun setzt man $x_1 = \frac{3}{2}$ ein und erhält $x_2 = \frac{\left(\frac{3}{2}\right)^2 + 2}{3} = 1{,}4166\ldots$

  Führt man dies so weiter fort, so erhält man:
  $x_3 = 1{,}41421\ldots$
  $x_4 = 1{,}41421\ldots$

  Damit ergibt sich auf drei Stellen nach dem Komma gerundet, folgende Nullstelle: $x \approx 1{,}414$.

Mathematische Fachbegriffe in Sachzusammenhängen

- Es ist hilfreich, wenn man einige sprachliche Beschreibungen einer Alltagssituation erkennt und diese mithilfe der Eigenschaften einer Funktion und ihrer Ableitung in mathematische Fachbegriffe übersetzen kann.

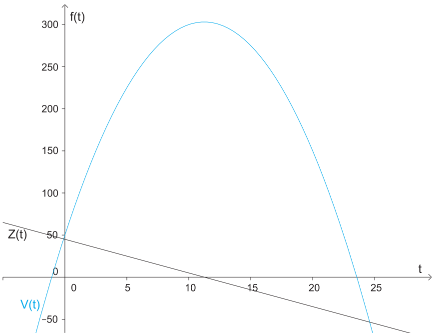
- Durch eine Pumpe kann einer Zisterne Wasser zugeführt oder entnommen werden.
  Die Funktion $V(t) = -2t^2 + 45t + 50$ beschreibt die Menge des Wassers in Abhängigkeit von der Zeit t.
  (V(t) in Liter, t in Minuten seit Beginn des Pumpvorgangs).
  - Wann ist die Zisterne leer?
    Gesucht sind die Nullstellen der Funktion.
    $V(t) = -2t^2 + 45t + 50 = 0$
    $t_1 = -1{,}1$ oder $t_2 = 23{,}6$
    Nach ca. 23,6 Minuten ist die Zisterne leer.
  - Wann ist am meisten Wasser in der Zisterne?
    Gesucht ist das Maximum des Wasserstandes.
    $V'(t) = -4t + 45 = 0$
    $t = \frac{45}{4} = 11{,}25$
    Nach ungefähr 11,25 Minuten ist am meisten Wasser in der Zisterne.

  Bestimme die Durchflussrate Z(t) des Wasservolumens und skizziere V(t) und Z(t). Gesucht ist die Ableitungsfunktion des Wasservolumens.
  $Z(t) = V'(t)$

  Dem Graphen von Z(t) kann man entnehmen:

  Da $Z(t) > 0$ für $0 \leqq t \leqq 11{,}25$ fließt in den ersten 11,25 Minuten Wasser zu, aber mit abnehmender Zuflussrate.

  Für $11{,}25 \leqq t \leqq 23$ fließt Wasser ab, mit zunehmender Zuflussrate, da $Z(t) > 0$.



Stetigkeit und Differenzierbarkeit von Funktionen

- **Stetigkeit** bedeutet anschaulich: Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Intervall $I = [a;b]$ stetig, wenn man die Funktion in diesem Bereich durchzeichnen kann, ohne den Stift absetzen zu müssen.

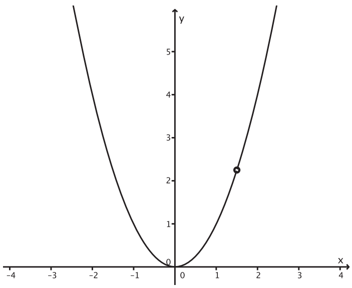
- **Definition:**
  Gegeben ist die Funktion f im Intervall $I = [a;b]$. Sie ist stetig an der Stelle $x_0 \in I$, wenn der Grenzwert von $f(x)$ für $x \to x_0$ existiert und mit dem Funktionswert $f(x_0)$ übereinstimmt.
  D.h. es gilt: $\lim\limits_{x \to x_0} = f(x_0)$.

- Bei der Stetigkeit handelt es sich um eine **lokale Eigenschaft** einer Funktion, d.h. es wird immer an einzelnen Stellen auf Stetigkeit untersucht. Damit eine Funktion stetig ist, muss sie an jeder Stelle ihres Definitionsbereiches stetig sein.

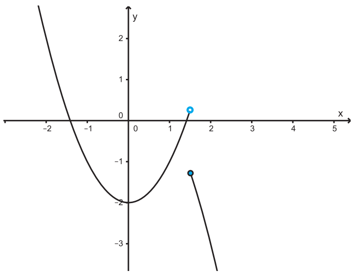
- Zusammenhang zwischen Stetigkeit und Differenzierbarkeit:
  Ist eine Funktion f an der Stelle x_0 differenzierbar, so ist f an der Stelle auch stetig.

- **Differenzierbarkeit** anschaulich betrachtet: Eine Funktion $f(x)$ heißt in einem Intervall $I = [a;b]$ differenzierbar, wenn man die Funktion in diesem Bereich ohne Knick durchzeichnen kann.

- **Beispiele** unstetiger Funktionen:



Die Funktion ist unstetig an der Stelle $x_0 = 1{,}5$, da hier die Funktion nicht definiert ist.



Die Funktion ist unstetig an der Stelle $x_0 = 1{,}5$, da der Grenzwert $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ nicht existiert.