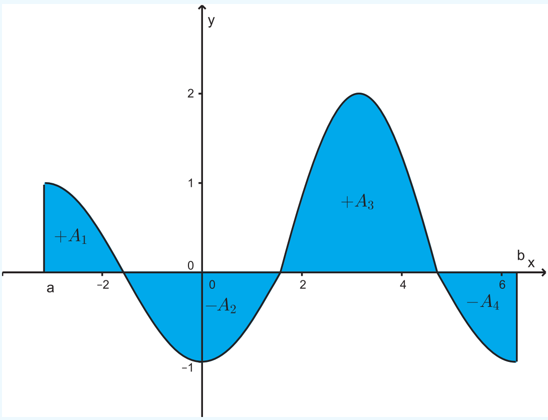
# Integral

- Das Integral gibt den orientierten Flächeninhalt zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse über einem Intervall [a ; b] an.

  Man schreibt: $\int_a^b f(x)\,dx$.

  a und b sind die **Grenzen** des Integrals.

- **Orientierter Flächeninhalt** heißt, dass die Inhalte von Flächen oberhalb der x-Achse ein positives Vorzeichen und Flächen unterhalb der x-Achse ein negatives Vorzeichen besitzen.




$$\int_a^b f(x)\,dx = A_1 - A_2 + A_3 - A_4$$

Sind die Flächen oberhalb und unterhalb der x-Achse gleich groß, so hat der orientierte Flächeninhalt, also das Integral, den Wert null.

# Bestimmung des Integrals

- Für das Integral gelten folgende **Regeln**:

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b r \cdot f(x)\,dx = r \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

- Das Integral berechnet sich mithilfe des **Hauptsatzes der Differenzial- und Integralrechnung**:
  Für eine stetige Funktion f auf dem Intervall [a ; b] gilt:
  $$\int_a^b f(x)\,dx = \left[F(x)\right]_a^b = F(b) - F(a),$$
  wobei F eine beliebige Stammfunktion von f auf dem Intervall ist.

- Eine Funktion F heißt **Stammfunktion** der Funktion f auf einem Intervall [a ; b], wenn gilt:
  $F'(x) = f(x)$.

- Ist F eine Stammfunktion von f, dann ist auch G mit $G(x) = F(x) + c$ eine Stammfunktion von f.

- **Beispiel:**
  Zeige, dass $F(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 1$ eine Stammfunktion von $f(x) = 4x^3 + 9x^2 + 12x$ ist.
  Damit F(x) eine Stammfunktion von f(x) ist, muss gelten: $F'(x) = f(x)$
  $F'(x) = 4 \cdot x^3 + 3 \cdot 3x^2 + 6 \cdot 2x = 4x^3 + 9x^2 + 12x = f(x)$

  Somit ist F(x) eine Stammfunktion von f(x).

## Bestimmung von Stammfunktionen

- Hat man eine Stammfunktion F von f gefunden, so kann man sofort unendlich viele angeben. Man braucht nur eine Zahl hinzuaddieren und erhält wieder eine Stammfunktion von f. Der Prozess des Auffindens der Stammfunktion ist also im Gegensatz zum Ableiten nicht eindeutig bestimmt.

- **Regeln zur Bestimmung von Stammfunktionen:**
  - Konstante Funktion $f(x) = a$: $F(x) = ax + c$
  - Potenzfunktion $f(x) = x^z$: $F(x) = \frac{1}{z+1}x^{z+1} + c$ (z ist eine rationale Zahl; $z \neq -1$)

    **Beispiel:**

    $f(x) = x^5$ $F(x) = \frac{1}{5+1}x^{5+1} = \frac{1}{6}x^6$
  - Für $f(x) = u(x) + v(x)$ gilt: $F(x) = U(x) + V(x) + c.$
  - Für $f(x) = k \cdot u(x)$ gilt: $F(x) = k \cdot U(x) + c.$
  - Für $f(x) = u(rx + s)$ gilt: $F(x) = \frac{1}{r} \cdot U(rx + s) + c.$

- **Beispiel:**

  $f(x) = (2x + 1)^3$

  $F(x) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{4}(2x + 1)^4\right) = \frac{1}{8}(2x + 1)^4$

  oder

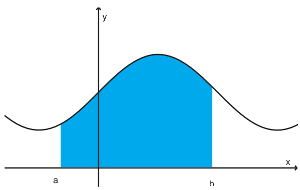
  $F(x) = \frac{1}{8}(2x + 1)^4 + 5$

# Flächeninhalt zwischen dem Graphen von f und der x-Achse

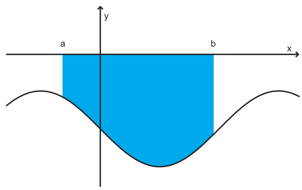
- Berechnet man die Fläche zwischen dem Graphen einer Funktion f und der x-Achse, so muss man darauf achten, ob die Teilflächen oberhalb oder unterhalb der x-Achse liegen.

- Flächeninhalte sind immer positiv. Integrale, die den orientierten Flächeninhalt bestimmen, können auch negativ sein.

- Für die **Inhalte einer Fläche** gilt:

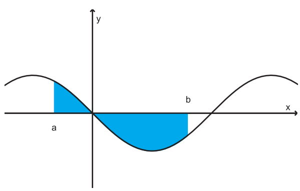



$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$




$$A = -\int_a^b f(x)\,dx = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right|$$

Liegt ein Teil der Fläche oberhalb und ein Teil unterhalb der x-Achse, so muss die gesamte Fläche mit zwei Integralen berechnet werden. Dazu muss die Nullstelle der Funktion, die im Intervall liegt, berechnet werden.

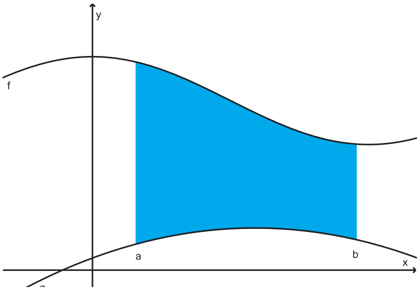



$$A = \int_a^s f(x)\,dx = \left|\int_s^b f(x)\,dx\right|$$

- **Vorgehensweise zur Berechnung des Flächeninhalts:**
  - Bestimmung der Nullstellen von f auf dem Intervall [a ; b]
  - Untersuchung der Vorzeichen der Teilflächen
  - Bestimme die Inhalte der Teilflächen und addiere sie.

## Flächeninhalt zwischen zwei Graphen f und g

- Für die Inhalte der Fläche, die von den Graphen zweier Funktionen f und g eingeschlossen wird, gilt für $f(x) \geqq g(x)$:

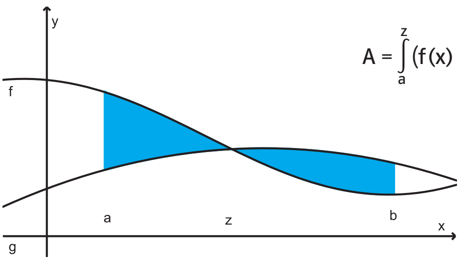



$$A = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$
$$= \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$
$$= F(b) - F(a) - (G(b) - G(a))$$

Hierbei ist es egal, ob Teile der Fläche oberhalb bzw. unterhalb der x-Achse liegen.
Es ist jedoch zu klären, welche Kurve in welchen Bereichen oberhalb der anderen Kurve liegt.

- Schneiden sich die beiden Graphen im Intervall, in dem die Fläche berechnet werden soll, so ist teilweise $f(x) \geqq g(x)$ und teilweise $g(x) \geqq f(x)$.

- Für den Inhalt der Fläche gilt dann:




$$A = \int_a^z (f(x) - g(x))\,dx + \int_z^b (g(x) - f(x))\,dx.$$

- Bei der Bestimmung einer Fläche zwischen zwei Graphen ist es sinnvoll eine **Skizze** zu erstellen, um festzustellen, welcher der beiden Graphen oben liegt. Außerdem hilft es die Anzahl der **Schnittpunkte** der beiden Graphen im gesuchten Intervall zu bestimmen.

# Integralfunktionen

- Zu jeder Zahl u in einem Intervall I, auf dem die Funktion stetig ist, nennt man die Funktion $J_u$ für die gilt

  $$J_u(x) = \int_u^x (f(t)\,dt \quad (x \in I)$$

  Integralfunktion von f zur unteren Grenze u.

- Für die Integralfunktion gilt: $J'_u(x) = f(x)$.
  D. h. jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion von f. Die Umkehrung gilt nicht.

- Eine Integralfunktion lässt sich wie ein unbestimmtes Integral berechnen, bei dem die untere Grenze einer festen Zahl und die obere Grenze einer Variablen x entspricht. Das Ergebnis ist somit keine Zahl, sondern eine von x abhängige Funktion.

- **Eigenschaften der Integralfunktion:**
  - Jede Integralfunktion ist eine Stammfunktion.
  - $J_u(u) = \int_u^u f(t)\,dt = 0$
  - $\int_u^x f(t)\,dt$ ist die Summe der orientierten Flächeninhalte zwischen dem Graphen von f und der x-Achse im Intervall $[u;x]$.
  - Jede Integralfunktion hat an der Stelle $x = u$ eine Nullstelle. Somit besitzt jede Integralfunktion eine Nullstelle. Deshalb sind nur Stammfunktionen, die mindestens eine Nullstelle besitzen, auch Integralfunktionen. Stammfunktionen ohne Nullstellen sind keine Integralfunktionen.

- **Beispiel:**

  $$\int_{-2}^{x} \left(\frac{1}{2}t^2 + 3\right)dt = \left[\frac{1}{6}t^3 + 3t\right]_{-2}^{x} = \frac{1}{6}x^3 + 3x - \left(\frac{1}{6}\cdot(-2)^3 + 3\cdot(-2)\right) = \frac{1}{6}x^3 + 3x + \frac{22}{3}$$

# Uneigentliche Integrale – nach rechts oder links unbegrenzte Fläche

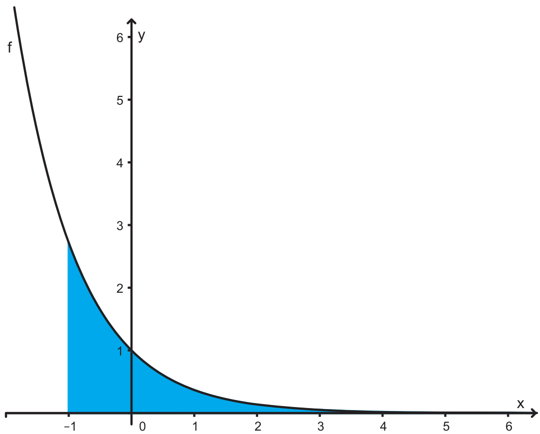
- Ist eine Fläche nach rechts oder links unbegrenzt, so ist eine **Intervallgrenze** nicht definiert.

- Ist eine Fläche nach rechts oder links unbegrenzt, so führt man das Problem auf die Untersuchung eines Integrals mit einer variablen und einer festen Grenze zurück, z. B.
$$\int_1^z f(x)\,dx \quad \text{oder} \quad \int_z^5 f(x)\,dx.$$

- Anschließend untersucht man den Grenzwert für $z \to \pm\infty$ oder, falls f eine Definitionslücke an der Stelle $x = c$ aufweist, für $z \to c$.

- Der Flächeninhalt einer nach rechts oder links unbegrenzten Funktion muss nicht unbedingt unendlich groß sein.

- **Beispiel:**




$$\int_{-1}^{\infty} (e^{-x})\,dx$$

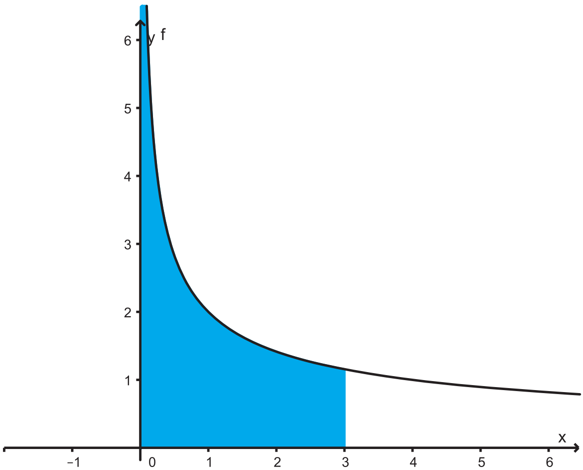
$$A(z) = \int_{-1}^{z} (e^{-x})\,dx = \left[-e^{-x}\right]_{-1}^{z} = -e^{-z} + e^{1}$$

Da $e^{-z} \to 0$ für $z \to \infty$, hat die unbegrenzte Fläche den Flächeninhalt $A = e$.

# Uneigentliche Integrale – nach oben oder unten unbegrenzte Fläche

- Eine Fläche kann auch nach oben oder unten unbegrenzt sein.

- **Beispiel:**
  Gesucht ist der Inhalt der Fläche, die von der Funktion $f(x) = \frac{2}{\sqrt{x}}$, der x-Achse, der y-Achse und der Geraden durch $x = 3$ begrenzt wird.




- Da die gesuchte Fläche nach oben unbegrenzt ist, führt man eine variable Grenze z ein.
  Es folgt:
  $A(z) = \int_z^3 \left(\frac{2}{\sqrt{x}}\right) dx = \left[4\sqrt{x}\right]_z^3 = 4\sqrt{3} - 4\sqrt{z}.$

- Für $z \to 0$ gilt:
  $4\sqrt{3} - 4\sqrt{z} \to 4\sqrt{3}.$

  Damit hat die unbegrenzte Fläche den Flächeninhalt:
  $A = 4\sqrt{3}.$

## Mittelwerte von Funktionen

- Den Mittelwert einer Zahlenfolge bestimmt man, indem man die einzelnen Zahlen $z_1$ bis $z_n$ addiert und durch die Anzahl n der Zahlen dividiert:

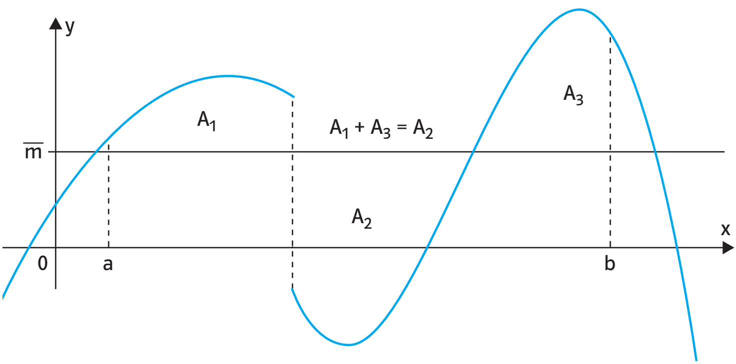
  $$\overline{m} = \frac{z_1 + z_2 + \ldots + z_n}{n}.$$

  Da es bei Funktionen in einem Intervall I unendliche viele Werte gibt, berechnet man den Mittelwert einer Funktion f mithilfe des Integrals.

- Der Mittelwert einer Funktion f berechnet sich im Intervall $I = [a;b]$ nach der Formel:

  $$\overline{m} = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

- Handelt es sich bei $\overline{m}$ um dem Mittelwert der Funktionswerte der Funktion f im Intervall $I = [a;b]$, so sind die Flächeninhalte die vom Graphen von f und der Geraden $y = \overline{m}$ eingeschlossen werden, oberhalb und unterhalb dieser Geraden gleich groß.



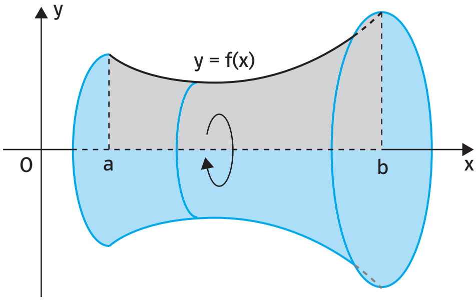

- **Beispiel:**
  Bestimme den Mittelwert der Funktion $f(x) = -x^2 + 4x$ im Intervall $I = [0,4]$.

  $$\overline{m} = \frac{1}{4-0}\int_0^4 (-x^2 + 4x)\,dx = \frac{1}{4}\cdot\left[-\frac{1}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^4 = \frac{1}{4}\cdot\left(\left(-\frac{64}{3} + 32\right) - 0\right) = \frac{8}{3}$$

## Rauminhalte von Rotationskörpern

- Mithilfe des Integrals können auch Rauminhalte von Rotationskörpern berechnet werden.

- Der Graph von f schließt mit der x-Achse und den Geraden mit den Gleichungen $x = a$ und $x = b$ eine Fläche ein. Rotiert diese Fläche um die x-Achse, entsteht ein Drehkörper oder Rotationskörper.
  Für sein Volumen gilt:




$$V = \pi \cdot \int_a^b (f(x))^2\,dx.$$

- **Spezialfälle:**
  - Ist die Funktion f eine konstante Funktion $f(x) = a$, so entsteht bei der Rotation um die x-Achse ein **Zylinder**.
  - Ist die Funktion f eine Ursprungsgerade $f(x) = mx$, so entsteht ein **Kegel**.
  - Ist die Funktion f ein Halbkreis $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, so entsteht eine **Kugel**.