Vektoren

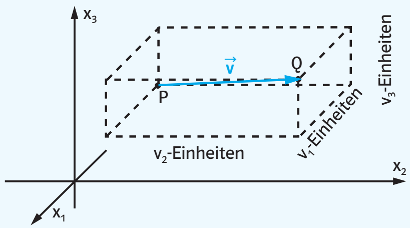
- Ein Vektor mit drei Koordinaten (dreidimensionaler Vektor) ist ein **geordnetes Zahlentripel**, welches wir als **Spalte** schreiben.

- Ein Vektor stellt eine **Verschiebung** dar, die einen Punkt P auf einen Punkt Q verschiebt.

- Ein Vektor hat eine **Länge** und eine **Richtung**.

- Bildet der Vektor $\vec{v}$ den Punkt $P(p_1|p_2|p_3)$ auf den Punkt $Q(q_1|q_2|q_3)$ ab, so gilt:

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \overrightarrow{PQ} = \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix}$$



- Mit einem Vektor kann man die **Lage eines Punktes** im Koordinatensystem beschreiben.
  Der Vektor $\vec{p} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ beschreibt den Punkt $P(3|5|7)$ im Koordinatensystem. Man nennt den Vektor $\overrightarrow{OP}$, der den Ursprung auf den Punkt P abbildet, auch **Ortsvektor**.

- Der **Nullvektor** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat die Länge 0, aber keine festgelegte Richtung.

- Zu jedem Vektor $\vec{p}$ existiert ein **Gegenvektor** $-\vec{p}$. Beide Vektoren haben die gleiche Länge, aber entgegensetzte Richtung.

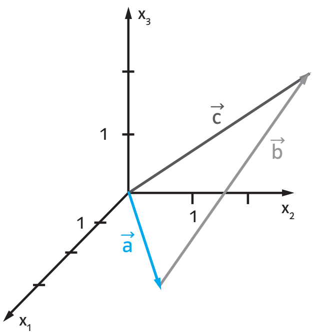
Addition von Vektoren

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden addiert, indem man die einzelnen Koordinaten der Vektoren miteinander addiert.

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{pmatrix}.$$

- Für alle Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ einer Ebene oder des Raumes gelten bei der Addition folgende Gesetze:
  - $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$ (**Kommutativgesetz**),
  - $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = \left(\vec{a} + \vec{b}\right) + c = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$ (**Assoziativgesetz**).

- Zeichnerisch werden zwei Vektoren addiert, indem man das Ende des einen Vektors an die Spitze des anderen Vektors setzt.



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 1{,}5 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2{,}5 \\ 1{,}5 \end{pmatrix}$$

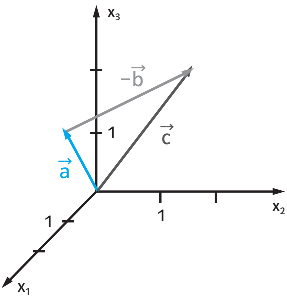
Subtraktion von Vektoren

- Zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ werden subtrahiert, indem man die einzelnen Koordinaten der Vektoren voneinander subtrahiert.

  $$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 - b_1 \\ a_2 - b_2 \\ a_3 - b_3 \end{pmatrix}.$$

- Bei der Subtraktion kann man die beiden Zahlen nicht vertauschen oder die Klammern beliebig verschieben. Somit gelten bei der Subtraktion das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz nicht.

- Zeichnerisch werden zwei Vektoren subtrahiert, indem man den Gegenvektor $-\vec{b}$ zum Vektor $\vec{a}$ addiert.



$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{b} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}5 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3{,}5 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Multiplikation eines Vektors mit einer Zahl

- Multipliziert man einen Vektor $\vec{a}$ mit einer reellen Zahl $r \neq 0$, so erhält man einen Vektor $r \cdot \vec{a}$, der parallel zu $\vec{a}$ ist.

- Der Vektor $r \cdot \vec{a}$ ist r-mal so lang wie der Vektor $\vec{a}$.

- Der Vektor $r \cdot \vec{a}$ hat die gleiche Richtung wie der Vektor $\vec{a}$, wenn $r > 0$.

- Der Vektor $r \cdot \vec{a}$ hat die entgegengesetzte Richtung wie der Vektor $\vec{a}$, wenn $r < 0$.

- Für einen Vektor und eine Zahl $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$r \cdot \vec{v} = r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r \cdot v_1 \\ r \cdot v_2 \\ r \cdot v_3 \end{pmatrix}.$$

- Multipliziert man einen Vektor $\vec{a}$ mit -1, so erhält man seinen Gegenvektor. Der Vektor und der Gegenvektor sind gleichlang, aber entgegengerichtet.

- Für beliebige Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und reelle Zahlen r, s gilt:
  - $r \cdot (s \cdot \vec{a}) = (r \cdot s) \cdot \vec{a}$ (**Assoziativgesetz**),
  - $r \cdot (-\vec{a}) = (-r) \cdot \vec{a} = -(r \cdot \vec{a})$,
  - $(r + s) \cdot \vec{a} = r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{a}$ (**Distributivgesetz**),
  - $r \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = r \cdot \vec{a} + r \cdot \vec{b}$ (**Distributivgesetz**).

- Die Multiplikation eines Vektors mit einer reellen Zahl (Skalar) wird auch **Skalarmultiplikation** genannt .

- Sind zwei Vektoren Vielfache voneinander, d.h. $\vec{b} = r \cdot \vec{a}$, so nennt man sie **kollinear** oder **linear abhängig**. Die zugehörigen Pfeile haben die gleiche Richtung, aber unterschiedliche Länge.

Linearkombination

- Gegeben sind drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$. Kann man den Vektor $\vec{c}$ durch $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} = \vec{c}$ $(r, s \in \mathbb{R})$ darstellen, so nennt man $\vec{c}$ eine Linearkombination von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- Kann man einen Vektor als Linearkombination von anderen Vektoren darstellen, so nennt man die Vektoren linear abhängig. Ansonsten sind sie linear unabhängig.

- Sind mehrere Vektoren linear abhängig, so muss nicht jeder dieser Vektoren als Linearkombination der anderen darstellbar sein. Es muss jedoch für mindestens einen Vektor möglich sein.

- Lässt sich der Nullvektor durch eine Linearkombination von Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, … mit von null verschiedenen Koeffizienten $r \cdot \vec{a} + s \cdot \vec{b} + t \cdot \vec{c} + \ldots = \vec{o}$ darstellen, so sind die Vektoren **linear abhängig**.
  Ist die Gleichung nur für Koeffizienten, die den Wert 0 annehmen, erfüllt, so sind die Vektoren **linear unabhängig**.

- Für Vektoren in der **Ebene** gilt:
  Höchstens zwei Vektoren einer Ebene sind linear unabhängig.
  Jeder Vektor einer Ebene kann als Linearkombination zweier linear unabhängiger Vektoren dieser Ebene dargestellt werden.

Untersuchung von Vektoren auf lineare Abhängigkeit

- **Beispiel:**

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix}$ sind linear abhängig, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcll} r & + & 3s & - & t & = & 0 & \quad \text{I} \\ r & - & s & + & 3t & = & 0 & \quad \text{II} \\ 2r & + & s & + & 3t & = & 0 & \quad \text{III} \end{array}$$

hat unendlich viele Lösungen.

$r = -2t;\ \ s = t;\ \ t = t$

Damit gilt: $-2t \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}3\\-1\\1\end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix}-1\\3\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$

- **Beispiel:**

Die Vektoren $\begin{pmatrix}-3\\17\\18\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}5\\9\\7\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}12\\-10\\9\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig, das lineare Gleichungssystem

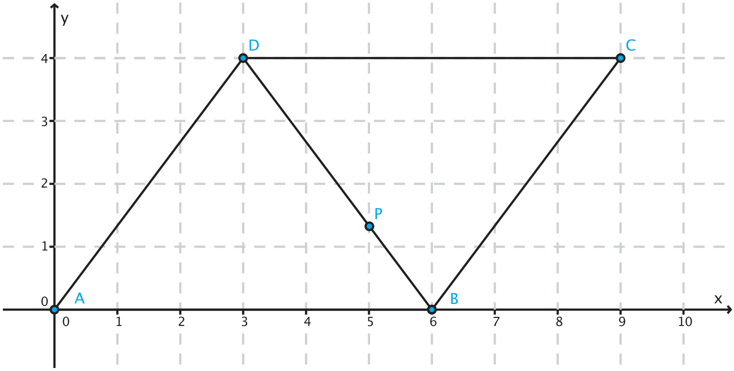
$$\begin{array}{rcrcrcll} -3r & + & 5s & + & 12t & = & 0 & \quad \text{I} \\ 17r & + & 9s & - & 10t & = & 0 & \quad \text{II} \\ 18r & + & 7s & + & 9t & = & 0 & \quad \text{III} \end{array}$$

hat die Lösungen
$r = 0,\ \ s = 0$ und $t = 0.$

Somit sind die drei Vektoren linear unabhängig.

Rechnen mit Vektoren

- **Beispiel:**
  Beim Viereck ABCD handelt es sich um ein Parallelogramm, bei dem die Diagonale $\overline{DB}$ im Verhältnis 2 : 1 durch den Punkt P geteilt wird.
  D.h. die Strecke $\overline{DP} = 2 \cdot \overline{PB}$.



- Bestimme die Koordinaten von P.
  Für den Ortsvektor zum Punkt P gilt:

$$\overline{OP} = \overline{OD} + \tfrac{2}{3}\,\overline{DB} = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\cdot\left(\begin{pmatrix}6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

- Der gesuchte Punkt hat die Koordinaten: $P\left(5 \,\middle|\, \frac{4}{3}\right)$.

- Das Parallelogramm könnte natürlich auch in einem dreidimensionalen Koordinatensystem liegen. Dann würde es sich in der x_2x_3-Ebene befinden. Dann würde für den Ortsvektor zum Punkt P gelten:

$$\overline{OP} = \overline{OD} + \tfrac{2}{3}\,\overline{DB} = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\cdot\left(\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\3\\4\end{pmatrix} + \tfrac{2}{3}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\-4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\5\\\frac{4}{3}\end{pmatrix}.$$

  In diesem Fall hätte der Punkt P die Koordinaten:
  $P\left(0 \mid 5 \,\middle|\, \frac{4}{3}\right)$.

Länge eines Vektors

- Unter dem **Betrag** eines Vektors versteht man seine **Pfeillänge**. Er sagt nichts über seine Richtung aus.

- Der Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ hat die Länge (den Betrag)

  $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

- Der Betrag ist kein Vektor, sondern eine Zahl. Diese Zahl kann nicht negativ sein.

- Den Vektor mit dem Betrag 1 nennt man den **Einheitsvektor** $\vec{a_0}$.
  Für $\vec{a} \neq \vec{o}$ gilt: $\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a}$. Der Einheitsvektor $\vec{a_0}$ hat die gleiche Richtung wie $\vec{a}$.

- Mithilfe des Betrags kann man auch den **Abstand zweier Punkte** bzw. die **Länge einer Strecke** bestimmen.
  Zwei Punkte $P(p_1 | p_2 | p_3)$ und $Q(q_1 | q_2 | q_3)$ haben den Abstand:

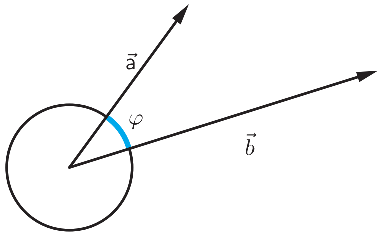
  $$|\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ q_3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} q_1 - p_1 \\ q_2 - p_2 \\ q_3 - p_3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(q_1 - p_1)^2 + (q_2 - p_2)^2 + (q_3 - p_3)^2}$$

- **Beispiel:**
  Bestimme den Abstand der beiden Punkte $P(-6 | -2 | 3)$ und $Q(9 | -2 | 11)$.
  Für den Abstand gilt:

  $$|\overrightarrow{PQ}| = \left| \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \right| = \left| \begin{pmatrix} 9-(-6) \\ -2-(-2) \\ 11-3 \end{pmatrix} \right| = \sqrt{(15)^2 + (0)^2 + (8)^2} = 17.$$

Skalarprodukt

- Unter dem Winkel φ zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ versteht man den kleineren der Winkel zwischen den Pfeilen der Vektoren mit gleichem Anfangspunkt. Der Winkel ist kleiner oder gleich 180°.



- Ist φ der Winkel zwischen den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, so heißt

  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ oder $\vec{a} \circ \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$

  das **Skalarprodukt** von $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- Das Ergebnis des Skalarproduktes ist eine **reelle Zahl**.

- Für $0° \leqq \varphi < 90°$ ist das Skalarprodukt positiv, da die Beträge von Vektoren und der $\cos\varphi$ positiv sind.
  Für $90° < \varphi \leqq 180°$ ist das Skalarprodukt negativ, da die Beträge von Vektoren positiv sind, aber der $\cos\varphi$ negativ ist.

- **Sonderfälle:**
  - $\varphi = 0°$: die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben die gleiche Richtung.
    Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ $(\cos(0°) = 1)$.
  - $\varphi = 180°$: die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ haben die entgegengesetzte Richtung.
    Es gilt: $\vec{a} \cdot \vec{b} = -|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|$ $(\cos(180°) = -1)$.

- In **Koordinatenform** lautet das Skalarprodukt:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Orthogonale Vektoren

- Mithilfe des Skalarproduktes kann man untersuchen, ob zwei Vektoren zueinander orthogonal sind.

- Der Winkel zwischen zwei orthogonalen Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ beträgt 90°. Damit ergibt sich mit dem **Skalarprodukt**:

  $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos(90°) = 0 \quad (\cos(90°) = 0).$

- Koordinatenform:

  $$\vec{a} \cdot \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 = 0.$$

- **Beispiel:**

  Gesucht sind alle Vektoren, die zu $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ und auch zu $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$ **orthogonal** sind.

  Damit der Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$ ein zu $\vec{a}$ und $\vec{b}$ orthogonaler Vektor ist, muss gelten:

  $\vec{a} \cdot \vec{v} = 3v_1 + 2v_2 + 4v_3 = 0 \quad$ und $\quad \vec{b} \cdot \vec{v} = 6v_1 + 5v_2 + 4v_3 = 0.$

  Umgewandelt in **Stufenform**:

  $$\begin{aligned} 3v_1 + 2v_2 + 4v_3 &= 0 \\ v_2 - 4v_3 &= 0 \end{aligned}$$

  Wählt man für $v_3 = t$ als Parameter, so hat dieses LGS die **Lösungsmenge** $L = \{(-4t; 4t; t) \mid (t \in \mathbb{R})\}$.

  Für die gesuchten Vektoren gilt: $\vec{v} = t \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Vektorprodukt

- Das **Vektorprodukt** ist auch unter dem Namen **Kreuzprodukt** bekannt.

- Beim Vektorprodukt bzw. Kreuzprodukt entsteht bei der Verknüpfung zweier Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ wieder ein Vektor.
  Dieser Vektor steht **senkrecht** (orthogonal) auf den beiden Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- Für das Vektorprodukt mit den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gilt:

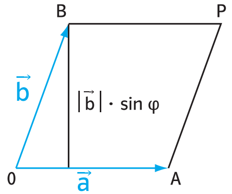
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 \\ a_3b_1 - a_1b_3 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix}.$$

- Sind die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ parallel, so gilt: $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{o}$.

- Das Vektorprodukt kann man benutzen, um den **Normalenvektor** einer Ebene zu bestimmen.

- Der **Betrag** des Vektorproduktes ist die **Maßzahl des Flächeninhaltes** des von den Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannten Parallelogramms:

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin \varphi.$$



- Mithilfe des Vektorproduktes kann man das Volumen des von drei Vektoren $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ im Raum aufgespannten Spats bestimmen:

$$V = \left|(\vec{a} \times \vec{b}) \circ \vec{c}\right|.$$